研究ノート

進化ゲームについて

竹内　博

Notes on Evolutionary Game Dynamics

Hiroshi TAKEUCHI

ABSTRACT

This paper focuses on the mathematical core of evolutionary game dynamics. The biologist Maynard Smith showed that game theory can be applied successfully in biology. Later, evolutionary game theory has found many applications in non-biological fields like economics and learning theory. This paper is based mainly on references [1] and [2] by Hofbauer and Sigmund.

KEYWORDS: Evolutionary game theory, Nash equilibrium, Evolutionarily stable strategy (ESS)

1．序

進化ゲームはメイナードスミスによって生物学の分野にゲーム理論の考え方を導入して，成功を収めた。その後，逆に生物学とゲーム理論の双方の交流により，近年はゲーム理論の各種応用分野に広がりをみせている。このノートでは進化ゲーム論を主に文献［1］，［2］に基づいて概説する。

2．レプリケータ力学系

2．1　ナッシュ均衡

今2人ゲームにおいて有限個の純粋戦略 Strat(Ⅰ)，Strat(Ⅱ)を持つとする。プレイヤーⅠが戦略 $\mathbf{e}_i$（i 成分のみ1をとりその他の成分は0のベクトル）をとり，プレイヤーⅡが戦略 $\mathbf{e}_j$ をとるときの利得を利得行列 $A=(a_{ij})$ を使って $\pi_1(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=a_{ij}$ と書く。プレイヤーⅠの混合戦略 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ は単位単体 $S_n=\{\mathbf{x}\in R^n, x_i\geq 0, \sum x_i=1\}$ の要素であり，純粋戦略数を n とするとき戦略 i にたいして x_i はその確率をあらわす。プレイヤーⅠが $\mathbf{x}\in S_n$，プレイヤーⅡが $\mathbf{y}\in S_m$ をとったとき，プレイヤーⅠの期待利得は

$$\pi_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i,j}x_i\pi_1(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)y_j=\sum x_i a_{ij}y_j=\mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{y}$$

となり，プレイヤーⅡの期待利得は $\pi_{\text{Ⅱ}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot B\mathbf{y}$ となる。ここで・はユークリッド内積を表す。戦略 $\mathbf{x}$ が $\mathbf{y}$ に対する最適反応とはすべての $\mathbf{z}$ に対して $\mathbf{z}\cdot A\,\mathbf{y}\leq\mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{y}$ が成り立つときを言う。$\mathbf{y}$ に対する最適反応全体を BR($\mathbf{y}$)と書く。$(\mathbf{x},\mathbf{y})$ がナッシュ均衡とは $\mathbf{x}\in BR(\mathbf{y})$ かつ $\mathbf{y}\in BR(\mathbf{x})$ のときを言う。対称ゲームのとき $(A=B^T)$，$\mathbf{x}\in S_n$ がナッシュ均衡とはすべての $\mathbf{z}\in S_n$ に対して $\mathbf{z}\cdot A\,\mathbf{x}\leq\mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{x}$。さらに $\mathbf{z}=\mathbf{x}$ のときにのみ等号が成立するとき，真のナッシュ均衡という。

2．2　レプリケータ方程式

n 個のタイプからなる個体群を考え，x_i によりタイプ i の頻度を表す。当面各タイプは純粋戦略をとるとする。よって純粋戦略の数も n となりタイプと純粋戦略が対応する。
個体群の状態を $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in S_n$ で与える。状

受理日：平成16年9月16日

態は形式的には混合戦略と同じになる。x_i は時間について微分可能と仮定する。もしそれぞれの個体が互いにランダムに出会い，利得行列Ａを持っているとすれば，$(A\mathbf{x})_i$ はタイプｉの個体の期待利得になる。また $\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}$ は個体群の状態の平均利得となる。このとき次のレプリケータ方程式が従う。

(1)　$$\dot{x}_i = x_i((A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}\cdot A\mathbf{x})$$

次の２つの簡単な事実はしばしば使われる。

(a)　Ａのｊ列に定数 c_j を加えても，レプリケータ方程式に影響を与えない。

(b)　$P=\prod_i x_i^{\alpha_i}$ が定義されるとき，

$\dot{P}=P\sum\alpha_i[(A\mathbf{x})_i-\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}]$ を満たす。

力学系の長期的挙動を述べるためにいくつかの定義を行う。

定義：静止点 $\mathbf{z}$ が安定とはもし $\mathbf{z}$ の任意の近傍Ｕに対して，$\mathbf{z}$ の近傍Ｖが存在してすべての $t\geq 0$ に対して，$\mathbf{x}\in V$ なら $\mathbf{x}(t)\in U$ となる。

定義：静止点 $\mathbf{z}$ が吸収しているとは近傍Ｕをとれば，すべての $\mathbf{x}\in U$ に対して $\mathbf{x}(t)\to\mathbf{z}(t\to\infty)$ が成り立つ。

定義：静止点 $\mathbf{z}$ が漸近安定であるとはｚが安定でかつ吸収しているとき。

定義：静止点が大域安定であるとは安定でかつ $z_i>0$ をもつｉに対して $x_i>0$ ならば $\mathbf{x}(t)\to\mathbf{z}$ $(t\to\infty)$。

２．３　ナッシュ均衡とレプリケータ方程式

レプリケータ方程式の静止点（（１）式の右辺に与えられたベクトル場の零点）は $i\in\mathrm{support}(\mathbf{x})$ に対して $(A\mathbf{x})_i=\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}$ を満たす点 $\mathbf{x}\in S_n$ となる。内部の静止点は $(A\mathbf{x})_1=(A\mathbf{x})_2=\cdots=(A\mathbf{x})_n$ を満たす解となる。
レプリケータ方程式の静止点と利得行列Ａによって与えられるゲームのナッシュ均衡には密接な関係がある。実際，

(a)　もし $\mathbf{z}$ がナッシュ均衡ならば，$\mathbf{z}$ は静止点である。

(b)　もし $\mathbf{z}$ が真のナッシュ均衡ならば，$\mathbf{z}$ は漸近的安定である。

(c)　もし静止点 $\mathbf{z}$ が $t\to\infty$ のとき内点の軌道の極限ならば，$\mathbf{z}$ はナッシュ均衡である。

(d)　静止点 $\mathbf{z}$ が安定ならば，$\mathbf{z}$ はナッシュ均衡である。

これは進化ゲーム理論におけるフォーク定理といわれる。

２．４　位相図の分類

２つのレプリケータ方程式に対し，１つの方程式の軌道が他の方程式の軌道に S_n の同相写像により写像されるとき同値であるという。同値類の分類は次元が低いとき，既になされている。n＝２のときレプリケータ方程式は［０，１］上で

(2)　$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1[(A\mathbf{x})_1-\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}]\\ &= x_1\{(A\mathbf{x})_1-x_1(A\mathbf{x})_1-x_2(A\mathbf{x})_2\}\\ &= x_1x_2[(A\mathbf{x})_1-(A\mathbf{x})_2]\end{aligned}$$

となる。ただし $x_2=1-x_1$ とした。３つの可能性がある。１つは内部に平衡点を持たない場合と他の２つは平衡点を持つ場合。後者の場合，もしこの点が安定のときそれは唯一のナッシュ均衡である，不安定のとき $x_1=0$ と $x_1=1$ によって与えられる純粋戦略はともにナッシュ均衡である。

n＝３のとき分類は複雑になり，一般に33個の位相図がある。特に興味あるゲームであるじゃんけんゲームの場合列に定数を加えて対角成分を０にすることができる。よって利得行列は次の形と思える。

(3)　$$A=\begin{pmatrix}0 & -a_2 & b_3\\ b_1 & 0 & -a_3\\ -a_1 & b_2 & 0\end{pmatrix}\qquad a_i>0, b_i>0。$$

このレプリケータ方程式は $\mathrm{int}\,S_3$（S_3 内部）に一意の静止点 $\mathbf{z}$ が存在する。それはまた対応するゲームのナッシュ均衡である。

定理：次の条件はＡで与えられたじゃんけんゲームについて互いに同値である。

(a)　$\mathbf{z}$ は漸近安定である，

(b)　$\mathbf{z}$ は大域安定である，

(c)　det A＞０，

(d)　$\mathbf{z}\cdot A\mathbf{z}>0$。

もし det A＝0 ならば S_n 内部のすべての軌道は $\mathbf{z}$ の周りの閉軌道になる。もし det A＜0 ならば静止点 $\mathbf{z}$ から出発した S_n 内部の軌道は境界に収束する。正確には $\mathbf{x}\in \mathrm{int}\, S_n$ に対して ω 極限（$\mathbf{x}(t)$ の $t\to\infty$ のときの集積点の集合）は3個の鞍点 $\mathbf{e}_i$ とそれらを結ぶ3本の直線からなるヘテロクリニックサイクルとなる。これはナッシュ均衡が必ずしもレプリケータ方程式の出力にならない最も簡単な例である。n＝4 のときの完全な分類はまだ未完成である。またこれは3次元のロトカヴォルテラ方程式の分類と同値になる。実際

定理：レプリケータ方程式の軌道をロトカヴォルテラ方程式

(4) $$\dot{y}_i = y_i\,(r_i + \sum_j c_{ij} y_j) \quad i=1,\ldots,n-1$$

の軌道へ，対応 $y_i = x_i/x_n$ によって与えられる $\{\mathrm{x}\in S_n; x_n>0\}$ から R_+^{n-1} への微分可能で可逆な写像が存在する。ここで $r_i = a_{in} - a_{nn}$ また $c_{ij} = a_{ij} - a_{nj}$ である。ロトカヴォルテロ方程式は数理生物学における基本的モデルであり，多くの結果がある。

一方 n 次元ロトカヴォルテラ方程式は $r_i = r$ として，$c_{ij} = a_{ij} - \alpha$（α は任意の実数）とした S_n 上のレプリケータ方程式になる。特に S_n 上のすべてのレプリケータ方程式は R_+^n 上の競争的ロトカヴォルテラ方程式に埋め込まれる。

2．5　パーマネンス

レプリケータ方程式がパーマネントとはすべての $\mathrm{x}\in \mathrm{int}\, S_n$ に対してある T が存在してすべての $t>T$ ならば $\mathbf{x}(t)\in K$ なるコンパクト集合 $K\subset \mathrm{int}\, S_n$ が存在するときを言う。荒く言えばもし最初にタイプが個体群に存在すれば，長期間経た後もそれらは存在する。

定理：レプリケータ方程式がパーマネントならば，唯一の静止点 $\mathbf{z}\in \mathrm{int}\, S_n$ が存在する。内部軌道の時間平均は $\mathbf{z}$ に収束する。すなわち

(5) $$\frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)\,dt \to z_i \quad for\ T\to\infty\ and\ i=1,\ldots,n$$

もし $a_{ii}=0$ ならば

$$(-1)^{n-1}\det A > 0, \qquad \mathbf{z}\cdot A\,\mathbf{z} > 0.$$

逆にレプリケータ方程式が int S_n に静止点がないときすべての軌道は S_n の境界に収束する。

ノート：もし int S_n の軌道が境界に ω 極限をもっても，時間平均は必ずしも収束しない。

定理：すべての静止点 $\mathbf{b}\in bd\,(S_n)$（S_n の境界）に対して $\mathbf{p}\in \mathrm{int}\, S_n$ が存在して $\mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{b} > \mathbf{b}\cdot A\,\mathbf{b}$ ならばレプリケータ方程式はパーマネントである。

多くの例の中で行列として monocyclic 利得行列

$$\begin{cases} a_{ii} = 0 & \\ a_{ij} > 0 & ,\ if\ i = j+1\,(\mathrm{mod}\,n) \\ a_{ij} \le 0 & \quad otherwise \end{cases}$$

を考えると，レプリケータ方程式は境界に吸収されるヘテロクリニックサイクルになる。このとき前の2つの定理は必要十分条件を与える。

定理：monocyclic 利得行列 A のレプリケータ方程式がパーマネントである必要十分条件は $\mathbf{z}\cdot A\,\mathbf{z}>0$ である静止点 $\mathbf{z}\in \mathrm{int}\, S_n$ が存在することである。

2．6　混合戦略力学系と ESS

これまでは個体群におけるタイプは単体 S_n を張る基本ベクトル $\mathbf{e}_i$ で与えられる純粋戦略を考えていた。ここではタイプは混合戦略 $\mathbf{p}(i)\in S_n$, $i=1,\ldots,N$ を考える。タイプと戦略は対応して同じ数 N をとる。

ここで個体群中の異なるタイプの個数 N は必ずしも N=n とは限らない。n は純粋戦略数をあらわす。タイプ $\mathbf{p}(j)$ を持つ個体に対するタイプ $\mathbf{p}(i)$ の平均利得 U の成分は $u_{ij} = \mathbf{p}(i)\cdot A\,\mathbf{p}(j)$ となる。ここで A は純粋戦略の n×n 利得行列であり，U は N×N 行列となる。もし $\mathbf{x}\in S_N$ が個体群内のタイプの頻度を表すとすると，個体群内の平均戦略は $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_i x_i \mathbf{p}(i)$ となる。レプリケータ方程式は

(6) $\dot{x}_i = x_i\,((U\mathbf{x})_i - \mathbf{x}\cdot U\mathbf{x})$ と書け，さらに

(7) $$\dot{x}_i = x_i\left[\textstyle\sum_j x_j u_{ij} - \sum_{i,j} x_i u_{ij} x_j\right] = x_i\left[\left(\mathbf{p}(i) - \mathbf{p}(\mathbf{x})\right)\cdot A\,\mathbf{p}(\mathbf{x})\right]。$$

進化ゲーム理論においてよく知られた概念は進化的安定性（ESS）である。これは直感的には個体

群内のすべてのメンバーが進化的安定戦略を使えば，別の戦略を持つ少数の突然変異体に侵略されないことを意味する。戦略 $\hat{\mathbf{p}} \in S_n$ が進化的安定であるとは $\mathbf{p} \neq \hat{\mathbf{p}}$ なる $\mathbf{p} \in S_n$ に対してこれらの２つのタイプのみの構成である個体群のレプリケータ方程式($\hat{\mathbf{p}}$ により在住者，$\mathbf{p}$ により侵入者)に従って，侵入者の頻度が十分少ないかぎり（侵入バリア $\varepsilon(\mathbf{p})$）侵入者は排除されることを導く。

(6)式により x_1 を侵入者の頻度として $x_2 = 1 - x_1$ より

(8) $\dot{x}_1 = x_1((U\mathbf{x})_1 - \mathbf{x}\cdot U\mathbf{x})$

$$= x_1x_2((U\mathbf{x})_1 - (U\mathbf{x})_2)$$

$$= x_1x_2\left[\mathbf{p}\cdot A\left(x_1\mathbf{p}+x_2\hat{\mathbf{p}}\right) - \hat{\mathbf{p}}\cdot A\left(x_1\mathbf{p}+x_2\hat{\mathbf{p}}\right)\right]$$

$$= x_1x_2\left[x_1\left(\mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\mathbf{p}\right) - x_2\left(\hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}}\right)\right]$$

さらに $x = x_1$ として

$$\dot{x} = x(1-x)\left[x\left(\mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\mathbf{p}\right) - (1-x)\left(\hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\mathbf{p} - \mathbf{p}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}}\right)\right]$$

となる。$x = 0$ が漸近安定となる必要十分条件は

(a)　平衡条件

(9)　$\mathbf{p}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}} \leq \hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}}$

(b)　安定条件

もし $\mathbf{p}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\hat{\mathbf{p}}$ ならば

(10)　$\mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{p} < \hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\mathbf{p}$。

条件(a)はナッシュ均衡の定義であり，戦略 $\hat{\mathbf{p}}$ が自分自身に対する最適な条件である。条件(b)はもし別の戦略 $\mathbf{p}$ を考えたとき $\mathbf{p}$ の $\mathbf{p}$ 自身に対する利得より $\hat{\mathbf{p}}$ の $\mathbf{p}$ に対する利得のほうが大きい。

定理：戦略 $\hat{\mathbf{p}}$ が ESS である必要十分条件は $\prod_i x_i^{\hat{p}_i}$ がレプリケータ方程式の狭義の局所的リアプノフ関数であることである。また同値な条件として $\hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\mathbf{p} > \mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{p}$ が S_n 内の $\hat{\mathbf{p}}$ のある近傍内のすべての $\mathbf{p} \neq \hat{\mathbf{p}}$ について成り立つこと。もし $\hat{\mathbf{p}} \in \mathrm{int}\,S_n$ ならば $\mathbf{p} \in S_n$ に対して $\hat{\mathbf{p}}\cdot A\,\mathbf{p} > \mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{p}$ が成り立つ。ここで関数 $V(\mathrm{x})$ がリアプノフ関数とは $\dot{V}(\mathrm{x}) \geq 0$ がすべての $\mathbf{x}$ について成り立ち，等号は $\mathbf{x}$ が静止点のときに限る。

特に ESS は漸近的安定な静止点であり，内部の ESS は大域的安定である。逆は一般には成り立たない。しかし

定理：戦略 $\hat{\mathbf{p}} \in S_n$ が ESS である必要十分条件はそれが強安定的であること。

ここで $\hat{\mathbf{p}}$ が強安定的であるとは $\hat{\mathbf{p}}$ が $\mathbf{p}(1),\ldots,\mathbf{p}(N) \in S_n$ の凸胞にあるとき，すべての $\mathbf{x} \in S_n$ について $\hat{\mathbf{p}}$ に十分近い $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ に対してレプリケータ方程式のもとで戦略 $\mathbf{p}(\mathbf{x}(t))$ は $\hat{\mathbf{p}}$ に収束する。

進化的安定性と力学的安定性の関係は特に $A = A^T$ によって定義されるパートナーシップゲームに対して簡単になる。パートナーシップゲームに対して戦略 $\hat{\mathbf{p}}$ が ESS である必要十分条件はそれがレプリケータ方程式の漸近的安定である。さらに平均利得 $\mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{x}$ の狭義な局所的最大値を与える。多くの興味あるゲームは ESS を持たない。よって次の一般化概念を定義する。

集合 $G \subset S_n$ が進化的に安定な（ES）集合であるとはすべての $\hat{\mathbf{x}} \in G$ と $\mathbf{x} \in Sn$ に対して $\mathbf{x}\cdot A\,\hat{\mathbf{x}} \leq \hat{\mathbf{x}}\cdot A\,\hat{\mathbf{x}}$ が成り立ち，すべての $\hat{\mathbf{x}} \in G$ と $\mathbf{x} \in S_n - G$ に対して等号が成り立つなら，$\mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}}\cdot A\,\mathbf{x}$ となる。

$G = \{\hat{\mathbf{x}}\}$ が ES 集合である必要十分条件は $\hat{\mathbf{x}}$ が ESS であることである。ES 集合 G のすべての要素は中立安定なナッシュ均衡である。すなわち $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in G$ に対して $\mathbf{x}\cdot A\,\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}\cdot A\,\hat{\mathbf{x}}$ ならば $\hat{\mathbf{x}}\cdot A\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{x}$ となる。集合 G が ES 集合である必要十分条件は各 $\hat{\mathbf{x}} \in G$ の近傍 U が存在して $\mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{x}}\cdot A\,\mathbf{x}$ で等号は $\mathbf{x} \in G$ のときのみである。もし G が $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\ S_n$ ならば U として S_n がとれる。ES 集合内の任意の戦略は安定であり，任意の ES 集合は漸近安定である。もし ES 集合 G が $\hat{\mathbf{x}}$ を S_n 内に含めば，S_n 内の内部にあるすべての軌道は G に収束する。

２．７　双行列ゲーム

２つの行列 A,B により定義される非対称ゲームを考える。２つの立場が２つの個体群に対応しているとするレプリケータ方程式は $S_n \times S_m$ 上で

(11)　$\dot{x}_i = x_i\left[(A\,\mathbf{y})_i - \mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{y}\right]$

$$\dot{y}_j = y_j\left[(B^T\mathbf{x})_j - \mathbf{x}\cdot B\,\mathbf{y}\right]$$

となる。この方程式は内部にアトラクターを持たない。実際，静止点が漸近安定である必要十分条件はそれが真のナッシュ均衡であること。n=m

＝2の場合は位相図の完全な分類が可能である。進化的に安定な集合の類似として，集合$G \subseteq S_n \times S_m$が真平衡集合とはナッシュ均衡の集合であり$(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) \in G$かつ$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \notin G$ならば$\hat{\mathbf{x}} \cdot A\hat{\mathbf{y}} > \mathbf{x} \cdot A\hat{\mathbf{y}}$，また同様に$\mathbf{x}$と$\mathbf{y}$を交換して定義する。

双行列ゲームを対称ゲームに変換する標準的方法はどのプレイヤーがどの立場かを確率的に決めると仮定して行う。今立場Ⅰの確率を$p\,(0<p<1)$としてあらわす。プレイヤーたちの戦略は(i,j)とする。立場Ⅰは$i \in Strat$(Ⅰ)を，立場Ⅱは$j \in Strat$(Ⅱ)をとるとすると，利得行列Cは成分が$c_{ij,kl} = pa_{il} + (1-p)b_{kj}$の$nm \times nm$行列となる。この行列をもつ対称ゲームを双行列ゲームの対称化という。

$\mathbf{z} = (z_{ij}) \in S_{nm}$に対して$\mathbf{x} \in S_n$と$\mathbf{y} \in S_m$は$x_i = \sum_j z_{ij}$また$y_j = \sum_i z_{ij}$により定義される。逆に$\mathbf{x} \in S_n$と$\mathbf{y} \in S_m$に対して少なくとも1つ$\mathbf{z} \in S_{nm}$が存在して$z_{ij} = x_i y_j$となる。行列Cを持つ対称化ゲームに対して対称ナッシュ均衡$\hat{\mathbf{z}} \in S_{nm}$が存在する。$\hat{\mathbf{z}}$は自分自身に対する最適反応よりすべての$\mathbf{z} \in S_{nm}$に対して$\mathbf{z} \cdot C\hat{\mathbf{z}} \leq \hat{\mathbf{z}} \cdot C\hat{\mathbf{z}}$となる。よって

(12) $p\mathbf{x} \cdot A\hat{\mathbf{y}} + (1-p)\hat{\mathbf{x}} \cdot B\mathbf{y} \leq p\hat{\mathbf{x}} \cdot A\hat{\mathbf{y}} + (1-p)\hat{\mathbf{x}} \cdot B\hat{\mathbf{y}}$

特にもし$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$で$\mathbf{y}$が任意とすると$\hat{\mathbf{y}}$は$\hat{\mathbf{x}}$に対し最適反応である。同様に考えて$(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$はナッシュ均衡となる。上のレプリケータ方程式は$\dot{z}_{ij} = z_{ij}[(\mathbf{e}_i,\mathbf{f}_j) - \mathbf{z}] \cdot C\mathbf{z}$となる。

(13) $W = \{\mathbf{z} \in S_{nm} : z_{ij}z_{kl} = z_{il}z_{kj}, 1 \leq i,k \leq n, 1 \leq j,l \leq m\}$
$\quad = \{\mathbf{z} \in S_{nm} : z_{ij} = x_i y_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$

より

このS_{nm}の（n+m-2）次元部分多様体（ライト多様体と言う）は不変多様体となる。この集合上で2つの立場の平均戦略は独立であり，W上で力学系は$S_n \times S_m$上で次になる。

(14) $\dot{x}_i = px_i[(A\mathbf{y})_i - \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}]$
$\quad \dot{y}_j = (1-p)y_j[(B^T\mathbf{x})_j - \mathbf{x} \cdot B\mathbf{y}]$

$p,(1-p)$を無視して，これは2つの個体群のレプリケータ方程式である。

双行列ゲーム(A,B)がc−パートナーシップゲーム（またはc−ゼロ和ゲーム）とはある$c>0$（または$c<0$）に対して$a_{ij} = d_{ij} + c_j$かつ$b_{ij} = cd_{ij} + d_i$を満たすd_{ij}, c_jとd_iが存在するときを言う。

そのようなゲームはゲーム(D,D)（または$(D,-D)$）として同じナッシュ均衡を持つ。もし$S_n \times S_m$内部にナッシュ均衡の対$(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$が存在すれば，関数

(15) $H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c\sum \hat{x}_i \log x_i - \sum \hat{y}_j \log y_j$

はレプリケータの方程式の運動に沿って定数となり，ハミルトン関数となる。特にc−ゼロ和ゲームの内部均衡点はいつも安定となる。

定理：次は互いに同値である

(a) ゲーム(A,B)がc−パートナーシップゲームである。

(b) すべての$i,k \in \{1,\ldots,n\}$と$j,l \in \{1,\ldots,m\}$に対して$c(a_{ij} - a_{il} - a_{kj} + a_{kl}) = b_{ij} - b_{jl} - b_{kj} + b_{kl}$

(c) $Q = cA - B$がすべてのi,jに対し$q_{ij} = u_i + v_j$となるu_i, v_jが存在する。

(d) すべての$\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{R}_0^n$と$\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{R}_0^m$に対し

(16) $c\boldsymbol{\xi} \cdot A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \cdot B\boldsymbol{\eta}$。

2つの個体群に対するゲームで進化的安定性は1つの個体群からの侵入者はそれ自身と相互作用しないので意味がない。戦略の対$(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$がナッシュパレート対であるとはナッシュ均衡であり，さらに$\mathbf{x} \in BR(\hat{\mathbf{y}})$かつ$\mathbf{y} \in BR(\hat{\mathbf{x}})$である$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S_n \times S_m$に対して

もし$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} > \hat{\mathbf{x}} \cdot A\mathbf{y}$ならば$\mathbf{x} \cdot B\mathbf{y} < \mathbf{x} \cdot B\hat{\mathbf{y}}$かつ

もし$\mathbf{x} \cdot B\mathbf{y} < \mathbf{x} \cdot B\hat{\mathbf{y}}$ならば$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} < \hat{\mathbf{x}} \cdot A\mathbf{y}$。

よって両プレイヤーが均衡から外れることにより利益を得ることはない。

定理：$(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) \in \mathrm{int}\,(S_n \times S_m)$がナッシュパレート対である必要十分条件はすべての$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{int}\,(S_n \times S_m)$に対して$c(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot A\mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot B(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = 0$となる定数$c>0$が存在すること。すなわち$(A,B)$が（−c）−ゼロ和ゲームとなる。そのようなナッシュパレート対はレプリケータ方程式に対し安定になる。

3．他のゲーム力学系

3．1　非線形利得関数

これまで戦略 i の平均利得は線形関数 $(A\mathbf{x})_i$ により与えた。しかし多くの興味ある例として例えば相互作用が2人より多くのグループ内で生じるときに，非線形の利得関数 $a_i(\mathbf{x})$ がある。このときのレプリケータ方程式は S_n 上で

(17)　$\dot{x}_i = x_i(a_i(\mathbf{x}) - \overline{a})$　となる。ここで $\overline{a} = \sum_i x_i a_i(\mathbf{x})$ は個体群内の平均利得を表す。ここで多くの結果は局所的に以前の結果を直接拡張できる。$\hat{\mathbf{x}}$ が局所的ESSとは $\hat{\mathbf{x}}$ のある近傍 $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$ に対して $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) > \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})$ となるとき。

利得関数の重要なクラスがポテンシャルにより与えられる。このために S_n 内部に次の内積を持つリーマン計量（Shahshahani計量と呼ばれる）を導入する。$\mathbf{x} \in \mathrm{int}\, S_n$ の接空間 $R_0{}^n = \{\boldsymbol{\xi} \in R^n : \sum \xi_i = 0\}$ に属する $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ に対して

(18)　$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})_{\mathrm{x}} = \sum \frac{1}{x_i} \xi_i \eta_i$$

もしすべての $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{R}_0{}^n$ に対し $(\dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi})_{\mathrm{x}} = D_{\mathrm{x}} V(\boldsymbol{\xi})$ となるポテンシャルVが存在するなら方程式（17）はShahshahani勾配である。それはまた同値な条件としてすべての $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$ に対して

(19)　$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

が成立すること。

もし利得行列Aがパートナーシップゲーム $(A = A^T)$ のとき $V(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$ はポテンシャルとなり，混合戦略に対するレプリケータ方程式(6)はShahshahani勾配になる。

3．2　模倣力学系

戦略は模倣により個体群内に伝播される。プレイヤーはランダムに個体群内の他のプレイヤーに会い，利得の差，戦略の頻度等に依存する確率でモデルの戦略を採用する。その結果入出力モデル方程式は

(20)　$$\dot{x}_i = x_i \sum_j [f_{ij}(\mathrm{x}) - f_{ji}(\mathrm{x})] x_j$$

となる。ここで f_{ij} はタイプjのプレイヤーがタイプiを採用する比率を表す。この割合が両プレイヤーの利得に依存して決まるとすると，すなわち

$f_{ij}(\mathbf{x}) = f(a_i(\mathbf{x}), a_j(\mathbf{x}))$ となる。ここで $f(u,v)$ は模倣規則を決める。もっとも単純な規則はよりましなほうを模倣するもので $u < v$ なら $f(u,v) = 0$，$u > v$ なら $f(u,v) = 1$ となる，これは不連続関数となる。

ある戦略が増加する必要十分条件はその利得が利得値 $a_1(\mathbf{x}),\ldots,a_n(\mathbf{x})$ の平均よりも大きいときとなる。

$f(u,v)$ が利得の差の増加関数 $\phi(u-v)$ であると仮定すると模倣力学系は，$\Psi(u) = \phi(u) - \phi(-u)$ とおいて（$\Psi(u) = -\Psi(-u)$ 奇関数で増加関数）

(21)　$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_i \sum_j \{f(a_i(\mathbf{x}), a_j(\mathbf{x})) - f(a_j(\mathbf{x}), a_i(\mathbf{x}))\} x_j \\ &= x_i \sum_j \{\phi(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})) - \phi(a_j(\mathbf{x}) - a_i(\mathbf{x}))\} x_j \\ &= x_i \sum_j \Psi(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})) x_j\end{aligned}$$

特に，$z \leq 0$ で $\phi(z) = 0$, $z > 0$ で $\phi(z) = \alpha z$ (α は正の定数）とすると，レプリケータ方程式(17)となる。プレイヤーがこの比例模倣規則を使うならば，期待獲得利得に比例する確率で，より高い結果をだす戦略をまねることになる。より一般的アプローチにより，真の増加関数fに対し

(22)　$$\dot{x}_i = x_i \left[f(a_i(\mathbf{x})) - \sum x_j f(a_j(\mathbf{x}))\right]$$

これは $f(u,v) = f(u) - f(v)$ の模倣規則から導かれる。f が線形なら，レプリケータ方程式(17)になる。同様に模倣規則 $f(u,v) = f(u) - c$（または $f(u,v) = c - f(v)$）のとき(22)になる。

模倣力学系のもっとも一般形は S_n 上で $\sum x_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ を満たす関数 g_i にたいして

(23)　$\dot{x}_i = x_i g_i(\mathbf{x})$ となる。

方程式が利得単調であるとは

(24)　$g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \Leftrightarrow a_i(\mathbf{x}) > a_j(\mathbf{x})$

であるとき。利得単調方程式に対してナッシュ均衡は静止点である，真のナッシュ均衡は漸近安定である，安定な静止点または内部軌道の ω 極限はナッシュ均衡である，などのフォーク定理が成り立つ。

模倣力学系が集計単調的であるとは$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in S_n$に対して

(25)　$\mathbf{y}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})>\mathbf{z}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})\Leftrightarrow\mathbf{y}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x})>\mathbf{z}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x})$

のときをいう。集計単調方程式は速度変化を認めればレプリケータ方程式(17)となる。

純粋戦略iが強支配されるとはある$\mathbf{y}\in S_n$が存在してすべての$\mathbf{x}\in S_n$に対して$a_i(\mathbf{x})<\mathbf{y}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x})$となるとき。合理的プレイヤーはこのような戦略は選ばない。強支配される戦略は取り除かれる，それを除いた新しいゲームが考えられ，ここでまた強支配されるゲームがあるときそれを取り除く。この操作は有限回繰り返される。すべての反復的に強支配されるゲームは取り除かれる。

ゲーム力学系が凸単調的であるとはすべてのiと$\mathbf{x},\mathbf{y}\in S_n$に対して

(26)　$a_i(\mathbf{x})<\mathbf{y}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x})\Rightarrow g_i(\mathbf{x})<\mathbf{y}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})$

となるとき。

定理：ゲーム力学系(23)が凸単調で戦略iが反復的に強支配されるとき内部の解にそって頻度$x_i(t)\to 0(t\to\infty)$。

　強支配される戦略が除去されるというこの性質は合理的プレイヤーがそのように行動することに従うが，われわれが期待するほどは力学系は多くない。方程式が凸単調である必要十分条件は関数fが凸であること。fが凸でないとき，軌道の開集合に沿って強支配されて生き残るゲームが存在する。

3．3　最適応答力学系

模倣による学習はプレイヤーの認識能力に関しては多くを要求していない。非常に大きな個体群の中でわずかのプレイヤーが現在の平均個体群戦略に対する最適反応を選ぶとする。プレイヤーは現在の個体群の状態を判断するに十分知的であり，最適に反応すると仮定する。これらから

最適反応(BR)力学系

(27)　$\dot{\mathbf{x}}\in BR(\mathbf{x})-\mathbf{x}$

が導かれる。最適反応は一般に一意でないので微分方程式ではなく微分包含となる。連続な利得関数$a_i(\mathbf{x})$に対して右辺は空でない，S_nの凸コンパクト部分集合となる。

よってすべてのtに対し(27)を満足するリプシッツ関数解が存在する。もし$BR(\mathbf{x})$が一意に定義された戦略$\mathbf{b}$ならば解は$\mathbf{x}(t)=(1-e^{-t})\mathbf{b}+e^{-t}\mathbf{x}$となる。

これは最適反応に向かう線形軌道である。$\mathbf{b}$はもはや一意な最適反応でない。しかし$\mathbf{x}$に対する最適反応である$\mathbf{b}$が存在してかつ自分自身の最適反応となる。すなわち$\mathbf{b}$は単体$BR(\mathbf{x})$に制限されたときのナッシュ均衡で，小さなεに対し$\mathbf{b}\in BR((1-\varepsilon)\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{b})$。これよりすべてのtに対して定義され$\mathbf{x}$を通る区分的線形解が構成される。n＝2のとき，(27)の位相図はレプリケータ方程式と細部で異なる。もし$\mathbf{e}_1$が$\mathbf{e}_2$により支配されるとすれば，2つの軌道がある。静止点$\mathbf{e}_2$と$\mathbf{e}_2$に収束する$\mathbf{e}_1$を通る半軌道。内部にナッシュ均衡$\mathbf{p}$を持つ双安定の状態のとき定数の場合を除いて，$\mathbf{p}$を出発し，ある時間そこにとどまり単調に$\mathbf{e}_1$または$\mathbf{e}_2$に収束する無限の解がある。内部ナッシュ均衡$\mathbf{p}$と安定共存の場合，$\mathbf{p}$と$\mathbf{e}_1$の間の点$\mathbf{x}$を出発する解は$\mathbf{p}$に到達するまで$\mathbf{e}_2$に向かう。到達するとそこにとどまる。n＝3の例として，(3)によって与えられるじゃんけんゲームを考える。$\det A>0$のとき，すべての軌道はナッシュ均衡$\mathbf{p}$に収束する。$\det A<0$のときすべての軌道は3点A_iによって張られる極限サイクルに収束する。ここでA_1は$(A\mathbf{x})_1=(A\mathbf{x})_2=0$の解で，他も同様に定義され，シャープレイ三角形と呼ばれる。実際，区分的線形関数$V(x)=|\max_i(Ax)_i|$は(27)のリアプノフ関数となる。このときレプリケータ方程式(1)の軌道はS_nの境界に収束する。しかし$T\to\infty$のとき時間平均

(28)　$\mathbf{z}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{x}(t)\,dt$

は集積点の集合としてシャープレイ三角形に収束する。真のナッシュ均衡は漸近安定である。強支配された戦略は最適反応力学系の解のうちで除去される。

$\mathrm{B}=\{\mathbf{b}\in(bdS_n):(A\mathbf{b})_i=(A\mathbf{b})_j\ all\ i,j\in\operatorname{supp}(\mathbf{b})\}$

を境界上の式(1)の静止点の集合とする。このとき関数

(29) $w(\mathbf{x}) = \max\{\sum_{\mathbf{b}\in B} \mathbf{b}\cdot A\,\mathbf{b}u(\mathbf{b}) : u(\mathbf{b}) \geq 0, \sum_{\mathbf{b}\in B} u(\mathbf{b}) = 1, \sum_{\mathbf{b}\in B} u(\mathbf{b})\mathbf{b} = \mathbf{x}\}$

は次のように解釈される。状態 $\mathbf{b}\in B$ にありサイズ $u(\mathbf{b})$ の部分個体群に分解する状態 $\mathbf{x}$ の個体群を考える。これを $\mathbf{b}$ の B 分離と呼ぶ。このとき $w(\mathbf{x})$ は個体が B 分離によって得られる $\mathbf{x}$ の最大平均利得である。それはすべての $\mathbf{b}\in B$ に対し $w(\mathbf{b}) \geq \mathbf{b}\cdot A\,\mathbf{b}$ を満たす最小の凹関数である。

定理：次の 3 つの条件は同値。

a. すべての $\mathbf{b}\in B$ に対して $\mathbf{p}\cdot A\,\mathbf{b} > \mathbf{b}\cdot A\,\mathbf{b}$ を満たすベクトル $\mathbf{p}\in S_n$ が存在する。

b. すべての $\mathbf{x}\in S_n$ に対し $V(\mathbf{x}) = \max_i (A\mathbf{x})_i - w(\mathbf{x}) > 0$

c. 一意の内部平衡点 $\hat{\mathbf{x}}$ で $\hat{\mathbf{x}}\cdot A\,\hat{\mathbf{x}} > w(\hat{\mathbf{x}})$ が存在する。

これらの条件からは(27)の最適反応(BR)パスにより有限時間で $\hat{\mathbf{x}}$ に到達する。

一般の利得行列 A に対してレプリケータ方程式のパーマネンスと最適反応力学系の内部平衡点の大域安定性の同値性はまだ不明である。この一般的結果のいくつかの例を議論する。もし $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ が内部の ESS ならば条件 a はすべての $\mathbf{b}\in B$ だけでなくすべての $\mathbf{b}\neq\mathbf{p}$ に対して成り立つ。この場合リアプノフ関数はより簡単な $V(\mathrm{x}) = \max_i (A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{x} \geq 0$ が使われる。じゃんけんゲームに対して集合 B は純粋戦略の集合になり，リアプノフ関数は単に $V(\mathbf{x}) = \max_i (A\mathbf{x})_i$ となる。

すべての ES 集合は最適反応力学系に沿い不変であるが漸近安定であるかは不明である。

双行列ゲームに対して，最適反応力学系は時間の変化を除き

(30) $\dot{\mathbf{x}} \in BR(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \qquad \dot{\mathbf{y}} \in BR(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$

となる。これは想像上のプレイの連続版に同値となる。そこで Brown がゼロ和ゲームに対する平衡点への収束をリアプノフ関数 $V(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_i (A\mathbf{y})_i - \min_j (\mathbf{x}^T A)_j$ を使って証明した。

$\max_i (A\mathbf{y})_i \geq \mathbf{x}\cdot A\,\mathbf{y} \geq \min_j (\mathbf{x}^T A)_j$ より $V(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ となり等号はゲームのナッシュ均衡ペアで成り立つ。

$V(t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ は(30)の解に沿って $\dot{V}(t) = -V(t)$ を満たす。よって大域アトラクターは均衡ペアの集合と一致する。

予想：$(\mathbf{p},\mathbf{q}) > \mathbf{0}$ を双行列ゲーム（A,B）の孤立内部平衡点で，BR 力学系で安定とする。そのとき（A,B）は c－ゼロ和ゲームである。

3．4 滑らかな最適反応

BR 力学系は滑らかな力学系たとえばロジット力学系

(31) $\dot{x}_i = \dfrac{e^{a_i(\mathbf{x})/\varepsilon}}{\sum_j e^{a_j(\mathbf{x})/\varepsilon}} - x_i \qquad with \quad \varepsilon > 0$

により近似される。$\varepsilon \to 0$ のときこれは最適反応力学系に収束する。また静止点 $\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ の族はナッシュ均衡の集合に集積する。$BR(\mathbf{x})$ は S_n 上の線形関数 $\mathbf{z} \to \sum_i z_i a_i(\mathbf{x})$ の最大値の集合としている。今 $\mathrm{int}\,S_n$ 上で関数 $b_{\varepsilon v}(\mathbf{x})$ を $\mathbf{z} \to \sum_i z_i a_i(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{z})$ の一意の最大値と定義する。ここで $v : \mathrm{int}\,S_n \to \mathrm{R}$ は真の凹関数で $\mathbf{z}$ が S_n の境界に近づくとき $|v'(\mathbf{z})| \to \infty$ となる。$\mathbf{v}$ がエントロピー $-\sum z_i \log z_i$ のとき，対応する滑らかな最適反応力学系

(32) $\dot{\mathbf{x}} = b_{\varepsilon v}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ は(31)式になる。最適反応を摂動する別の方法は確率的摂動である。

3．5 Brown-Von Neumann-Nash 力学系

Brown-Von Neumann-Nash 力学系(BNN)は次のように定義される。

(33) $\dot{x}_i = k_i(\mathbf{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} k_j(\mathbf{x})$

ここで $k_i(\mathbf{x}) = \max(0, a_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{a}(\mathbf{x}))$，戦略 i の超過利得の正の部分を表す。この力学系はナッシュが平衡点の存在の証明に使った連続写像 $\mathbf{f} : S_n \to S_n$，

(34) $f_i(\mathbf{x}) = \dfrac{x_i + k_i(\mathbf{x})}{1 + \sum_{j=1}^{n} k_j(\mathbf{x})}$

に密接に関連している。$\hat{\mathbf{x}}$ が $\mathbf{f}$ の固定点である必

要十分条件は $\hat{\mathbf{x}}$ が(33)の静止点である，またすべてのiについて $k_i(\hat{\mathbf{x}})=0$　すなわち $\hat{\mathbf{x}}$ はゲームのナッシュ均衡点である。

これまでのゲーム力学系の安定性に関しまとめる。$R_0^n=\{\boldsymbol{\xi}\in R^n : \sum_i \xi_i = 0\}$ とおく。

定理：1．すべての非ゼロ $\boldsymbol{\xi}\in R_0^n$ に対して $\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\xi}<0$ なら（平均利得関数 $\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}$ が S_n 上真の凹関数）ゲームは一意なナッシュ均衡点 $\hat{\mathbf{x}}$ をもつ。このナッシュ均衡 $\hat{\mathbf{x}}$ はESS，またレプリケータ方程式(1)，最適反応力学系(27)，BNN力学系(33)に対し大域安定となる。

2．すべての非ゼロ $\boldsymbol{\xi}\in R_0^n$ に対して $\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\xi}\le 0$ ならばナッシュ均衡の集合Eは凸になる。Eは(1)に対し安定，(27)，(33)に対し大域安定となる。摂動力学系(32)にたいし各 $\varepsilon>0$ に対し一意な静止点 $\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ をもつ。$\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ は(32)に対して大域安定となる。

3．すべての非ゼロ $\boldsymbol{\xi}\in R_0^n$ に対し $\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\xi}>0$（平均利得関数 $\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}$ が S_n 上真の凸関数）かつ内部ナッシュ均衡 $\hat{\mathbf{x}}$ が存在するなら，$\hat{\mathbf{x}}$ は式(1)にたいし大域的に反発し，(27)，(33)に対しては局所的に反発する。$\varepsilon>0$ に対し $\hat{\mathbf{x}}$ の近傍の $\hat{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ は(32)に対して局所的に反発となる。

例として(3)の行列Aを持つじゃんけんゲーム $(a_i=a, b_i=b)$ を考える。$a<b, a=b, a>b$ の場合がそれぞれ1．2．3．の場合に相当する。$a>b$ の場合に一意な平衡点 $\hat{\mathbf{x}}$ がすべての正当な進化力学系に対して不安定になることの理由は $\hat{\mathbf{x}}$ において個体は最適反応サイクル $\mathbf{e}_1\rightarrow\mathbf{e}_2\rightarrow\mathbf{e}_3\rightarrow\mathbf{e}_1$ に沿って利益をより多くもたらさないことによる。

3．6　調整力学系

S_n 上で $\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x})\ge 0$ を満たし，$\mathbf{x}$ がナッシュ均衡でなければ真の不等号が成り立つとき，このベクトル場は近視的調整力学系（MAD）という。これは個体が現在の状態よりはよりよい方向に動くことを意味する。これまで考えてきた力学系はこの性質を満たす。近視的調整力学系に対し真のナッシュ均衡はいつも漸近安定である。$\hat{\mathbf{x}}$ が内部均衡点のとき $\hat{\mathbf{x}}$ に向かう力学系 $(\dot{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x})$ がMADクラスに属する必要十分条件は $\hat{\mathbf{x}}$ がESSである。パートナーシップゲームに対し平均利得 $\mathbf{x}\cdot A\mathbf{x}$ は軌道に沿って増加する。

以前の結果は一般にMADには適用されない。実際一意なナッシュ均衡 $\mathbf{p}$ を持つ線形ゲームに対し，大域的アトラクターとして $\mathbf{p}$ を持つMADを構成できる。よって問題はいつも平衡点に収束する調整力学系が存在するかとなる。

答えは否である。

4．拡張

4．1　集団遺伝学

対立遺伝子（異なるタイプの遺伝子）が $A_1,\ldots,A_N$ となる遺伝子座を考える。個々の遺伝子型が (A_i,A_j) で記述される，最初は父親から受け継いだ対立遺伝子，２番目は母親から受け継いだ対立遺伝子を表す。$x_1,\ldots,x_N$ で個体群内の対立遺伝子の頻度を表す。$\mathbf{x}\in S_n$ により遺伝子全体の状態を表す。ランダムな交配を仮定して個体群はハーディワインベルグ均衡となる。すなわち遺伝子ペア (A_i,A_j) の頻度が x_ix_j で与えられる。遺伝子タイプ (A_i,A_j) と (A_j,A_i) は同じ表現型と仮定する。遺伝子タイプ (A_i,A_j) の適合度が対立遺伝子の頻度 x_i に独立な定数 a_{ij} で与えられるなら対称行列Aを持つレプリケータ方程式(1)を得る。これは遺伝子全体内での対立遺伝子によりプレイされるパートナーシップゲームと見られる。

頻度に依存した選択を持つ場合はより複雑なゲームとなる。遺伝子タイプが (A_i,A_j) の個体が $n\times n$ 行列Aにより記述される個体ゲームに対し戦略 $\mathbf{p}(ij)\in S_n$ を使うとする。個体群内の平均戦略 $\mathbf{p}\in S_n$ は $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{x})=\sum_{ij} x_ix_j\mathbf{p}(ij)$ で与えられる。遺伝子座 A_i は確率 x_j でもって (A_i,A_j) または (A_j,A_i) に属するので $\mathbf{p}^i=\sum x_j\mathbf{p}(ij)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathbf{p}}{\partial x_i}$ は遺伝子座 A_i により使われる戦略の頻度を表す。遺伝子全体での頻度依存選択力学系は S_N 上で

(35)　$\dot{x}_i=x_i\left[(\mathbf{p}^i-\mathbf{p})\cdot A\,\mathbf{p}\right]$ となる。

レプリケータ方程式(1)がShahshahani勾配なら(35)もまたShahshahani勾配となる。特にn＝2なら(35)のポテンシャルは$\alpha = a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12} \neq 0$とすると

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}\left[\sum x_i x_j p_1(ij) - \frac{a_{22} - a_{12}}{\alpha}\right]^2$$

で与えられる。

もし2×2ゲームが混合戦略ESS $\hat{\mathbf{p}}$を認めるなら戦略$\mathbf{p}$はESSに収束する。ここで$S(\hat{\mathbf{p}}) = \{\mathbf{x} \in S_N : \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{p}}\}$は空集合でないとする。$n \times n$行列$C(\mathbf{x})$を対立遺伝子戦略$\mathbf{p}^i$の共分散行列とする。行列の成分は$c_{kl}(\mathbf{x}) = \sum x_i (p^i_k - \mathbf{p}_k)(p^i_l - \mathbf{p}_l)$。このとき戦略の頻度$\mathbf{p}$に対して

$$\dot{\mathbf{p}} = 2\sum \mathbf{p}^i \dot{x}_i = 2\sum x_i \mathbf{p}^i\left[(\mathbf{p}^i - \mathbf{p})\cdot A\,\mathbf{p}\right] = 2C(\mathbf{x})A\,\mathbf{p}$$

今ある点$\mathbf{x} \in \mathrm{int}\,S_N$で$\dot{\mathbf{p}} = 0$すなわち戦略が変化しなければ，$\dot{\mathbf{x}} = 0$より遺伝的レベルで静止点である。

状態$\hat{\mathbf{p}} \in S_n$が戦略的に安定であるとは$S(\hat{\mathbf{p}})$が(35)の静止点からなり$\hat{\mathbf{x}}$のすべての近傍Uに対して，$\mathbf{x}(t) \in U$ (for all t) すべての$\mathbf{x} \in V$に対し$\mathbf{p}(\mathbf{x}(t)) \to \hat{\mathbf{p}}$となる$\hat{\mathbf{x}}$の近傍Vが存在する。これは漸近安定より弱く，安定より強い。

定理：n＝2，n＝3のとき，$\hat{\mathbf{p}}$がESSかつ$S(\hat{\mathbf{p}})$が空集合でないならば，$\hat{\mathbf{p}}$は戦略的に安定である。$n \geq 4$ではまだ不明である。しかし一般に

定理：もし$\hat{\mathbf{p}} \in \mathrm{int}\,S_n$がESSとして，すべての$\hat{\mathbf{x}} \in S(\hat{\mathbf{p}})$に対し，共分散行列$C(\hat{\mathbf{x}})$の階数がN-1とn-1の小さいほうに等しいとするならば，$\hat{\mathbf{p}}$は戦略的に安定である。

その他拡張としては戦略数を無限集合として考え適応力学系への応用を考察する。離散力学系との関係を考える。拡散モデルとの関係，経済学への応用など各種応用が考えられている。これらの概説は別の機会とする。

参考文献

[1] J.Hofbauer and K.Sigmund, Evolutionary game dynamics, Bull. Of the A.M.S, vo 40, No 4, 479－519 (2003)

[2] J.Hofbauer and K.Sigmund, Evolutionary games and population dynamics, Cambridge Univ. Press (1998).竹内康博，佐藤一徳，宮崎倫子訳，進化ゲームと微分方程式，現代数学社（2001）

（竹内　博：四国大学　応用数理研究室）